Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
Краснодарского края
«Курганинский аграрно-технологический техникум»
(наименование образовательного учреждения)

**Урок общего разбора темы с использованием опорных схем**
**«Иррациональные неравенства»**

**Преподаватель математики**
**Короткова А. Э.**

**г. Курганинск, п. Красное Поле, 2023 г.**

Рассмотрено и одобрено на заседании учебно-методического объединения «Общеобразовательных дисциплин по профильным, математическим и естественнонаучным дисциплинам»
Протокол № 3 от 25 октября 2023 г.
Председатель УМО Э.А. Приходько

Утверждены решением педагогического совета
Протокол № 4 от 15 ноября 2023 г.

**Автор:** Короткова А.Э., преподаватель математики, высшей квалификационной категории ГАПОУ КК «Курганинский аграрно - технологический техникум»

**Рецензенты:**
Проскурякова С.В., заместитель директора по УМР ГБПОУ «Лабинский социально - технический техникум», г. Лабинск

**Урок общего разбора темы с использованием опорных схем**
**«Иррациональные неравенства»**

Перед началом урока учащиеся рассаживаются в соответствии с тремя уровнями подготовки на определённые ряды. Отметим, что навыки по рассматриваемой теме не относятся к обязательным требованиям к подготовке учащихся, поэтому, у меня её изучают только более подготовленные учащиеся (1 и 2 группа).

**Цель урока.** Разобрать способы решения иррациональных неравенств среднего и повышенного уровня сложности, разработать опорные схемы.

**1 этап урока - организационный (1мин.)**

*Учитель сообщает учащимся тему урока, цель и поясняет назначение раздаточного материала, который находится на партах.*

**2 этап урока (5мин.)**
**Устная работа на повторение по решению простейших задач по теме «Степень с рациональным показателем»**

*Учитель предлагает учащимся по очереди отвечать на вопросы, комментируя свой ответ с ссылкой на соответствующий теоретический факт.*

Повторение рекомендуется проводить на каждом уроке в 10-11-х классах. Учащимся раздаются листы с заданиями для устной работы, составленные на основе краевых диагностических контрольных работ следующего содержания.

Степень с рациональным показателем

Упростить: 1) $12m^4/3m^8$
2) $6c^{3/7} + 4\,(c^{1/7})^3$
3) $(32x^2)^{1/5} \cdot x^{3/5}$
4) $2^{4,6a} \cdot 2^{-1,6a}$
5) $2x^{0,2} \cdot x^{-1,2}$
6) $4x^{3/5} \cdot x^{1/10}$
7) $(25x^4)^{0,5}$
8) $2x^{4/5} \cdot 3x^{1/5}$
9) $(3x^{2/5})^2 + 2x^{4/5}$
10) $3x^{1/2} \cdot x^{3/2}$

Вычислить: 11) $4^{3,2m} \cdot 4^{-1,2m}$, при m =1/4
12) $6^{-5,6a} \cdot 6^{3,6a}$, при a = 1/2
13) $5 \cdot 27^{2/3} - 16^{1/4}$
14) $3^{4,4c} \cdot 3^{-6,4c}$, при c =1/2
15) $3x^{2/5} \cdot x^{3/5}$, при x = 2

**3 этап урока - изучение новой темы (20мин.), лекция**

*Учитель предлагает 3 группе учащихся приступить к работе над повторением с карточками - консультантами по теме «Простейшие тригонометрические уравнения» (т.к. изучаемый материал повышенного уровня сложности и к обязательному не относится). Учащиеся 3 группы - это, как правила учащиеся со слабой математической подготовкой, педагогически запущенные школьники. После выполнения задания происходит обмен карточками внутри группы. Более подготовленные учащиеся приступают к разбору новой темы.*

Перед разбором способов решений иррациональных неравенств учащимся необходимо напомнить основные теоретические факты, на основе которых будут строится опорные схемы для равносильных переходов. В зависимости от уровня подготовки учащихся это могут быть либо устные ответы на вопросы учителя, либо совместная работа учителя и учащихся, но в любом случае на уроке должно прозвучать следующее.

**Определение 1.** Неравенства, имеющие одно и то же множество решений, называют равносильными.

При решении неравенств обычно данное неравенство преобразуется в ему равносильное.

Например, неравенство $\mathbf{(x - 3)/(x^2 + 1) < 0}$ **и** $\mathbf{x - 3 < 0}$ равносильны, т.к. имеют одно и то же множество решений: $\mathbf{x < 3}$. Неравенства $\mathbf{2x/(x - 1) > 1}$ **и** $\mathbf{2x > x - 1}$ не равносильны, т.к. решениями первого являются решения $x < -1$ и $x > 1$, а решениями второго - числа $x > -1$.

**Определение 2.** Область определения неравенства - это множество таких значений x, при которых имеют смысл обе части неравенства.

**Мотивация.** Неравенства сами по себе представляют интерес для изучения, т.к. именно с их помощью на символическом языке записываются важнейшие задачи познания реальной действительности. Часто неравенство служит важным вспомогательным средством, позволяющим доказать или опровергнуть существование каких-либо объектов, оценить их количество провести классификацию. Поэтому, с неравенствами приходится сталкиваться не менее часто, чем с уравнениями.

**Определение.** Неравенство, содержащие переменную под знаком корня, называется иррациональным.

<u>Пример 1.</u> $\sqrt{(5 - x)} < 4$. Устно проводится рассуждение, затем записывается решение. При обсуждении учащимся задаются вопросы:

- Какова область определения неравенства?
- При каком условии при возведении в квадрат обеих частей получится равносильное неравенство?

$$\sqrt{(5 - x)} < 4 \iff \begin{matrix} 5 - x \ge 0 \\ 5 - x < 16 \end{matrix} \iff -11 < x \le 5.$$

<u>Пример 2.</u> $\sqrt{10 + x - x^2} \ge 2 \iff \begin{matrix} 10 + x - x^2 \ge 0 \\ 10 + x - x^2 \ge 4 \end{matrix} \iff 10 + x - x^2 \ge 4$

т.к. каждое решение второго неравенства системы является решением первого неравенства.

Пример 3. Решить неравенства

а) $\sqrt{3x - 4} < -5$ нет решений, т.к. при всех допустимых значениях переменной значения корня не отрицательны.

б) $\sqrt{2x^2 + 5x - 3} \le 0 \iff 2x^2 + 5x - 3 = 0$

Разберём три типичных примера, из которых будет видно, как при решении неравенств делать равносильные переходы, когда напрашивающееся преобразование равносильным не является.

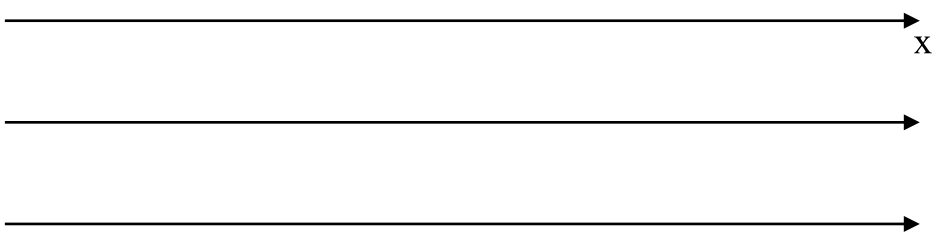
Пример 1. $\sqrt{1 - 4x} < x + 11$.

Хотелось бы, конечно, возвести обе части в квадрат, чтобы получить квадратное неравенство. При этом мы можем получить не равносильное неравенство. Если рассматривать только те x для которых обе части не отрицательны (левая неотрицательно заведомо), то возведение в квадрат будет всё таки возможным. Но что же делать с теми x, для которых правая часть отрицательна? А ничего не делать, поскольку ни одно их этих x решением неравенства не будет: ведь для всякого решения неравенства правая часть больше левой, являющейся неотрицательным числом, и, стало быть, сама не отрицательна. Итак, следствием нашего неравенства будет такая система

$$\begin{array}{l} 1 - 4x < (x + 11)^2 \\ x + 11 \ge 0. \end{array}$$

Тем не менее, эта система не обязана быть равносильной исходному неравенству. Областью определения полученной системы является вся числовая прямая, в то время как исходное неравенство определено лишь для тех x, для которых $1 - 4x \ge 0$. Значит если мы хотим, чтобы наша система была равносильна неравенству надо приписать это условие:

$$\begin{array}{l} 1 - 4x < (x + 11)^2 \\ x + 11 \ge 0 \\ 1 - 4x \ge 0 \end{array}$$




Ответ: (- 6; ¼]

Предлагается сильному ученику провести рассуждение в общем виде, получится вот, что

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \iff \begin{array}{l} f(x) < (g(x))^2 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) \ge 0. \end{array}$$

Если бы в исходном неравенстве стоял знак $\le$ вместо $<$, то в качестве первого неравенства этой системы надо было взять $f(x) \le (g(x))^2$.

Пример 2. $\sqrt{x} > x - 2$

Здесь опять можно возвести в квадрат для тех x, для которых выполнено условие $x - 2 \geq 0$. Однако теперь уже нельзя отбросить те x, для которых правая часть отрицательна: ведь в этом случае правая часть будет меньше заведомо не отрицательной левой, так что все такие x будут решениями неравенств. Впрочем, не все, а те которые входят в область определения неравенства, т.е. для которых $x \geq 0$. *Какие случаи следует рассмотреть?*

1 случай: если $x - 2 \geq 0$, то из нашего неравенства следует система

$$x > (x - 2)^2$$
$$x - 2 \geq 0$$

2 случай: если $x - 2 < 0$, то из нашего неравенства следует система

$$x \geq 0$$
$$x - 2 < 0$$

При разборе случаев возникает составное условие под названием «совокупность». Получим равносильную неравенству совокупность двух систем

$$x > (x - 2)^2$$
$$x - 2 \geq 0$$
$$x \geq 0$$
$$x - 2 < 0.$$

Сильному учащемуся предлагается провести рассуждение в общем, виде, то получится вот, что:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{array}{l} f(x) > (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0. \end{array}$$

Если бы в исходном неравенстве стоял знак $\geq$ вместо $>$, то в качестве первого неравенства этой системы надо было взять $f(x) \geq (g(x))^2$.

Пример 3. $\sqrt{x^2 - 1} > \sqrt{x + 5}$.

Вопросы:

- Какие значения принимают выражения стоящие в левой и правой части?
- Можно ли возвести в квадрат?
- Какова область определения неравенств?

Получим $\begin{array}{l} x^2 - 1 > x + 5 \\ x + 5 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{array}$

- Какое условие лишнее?

Таким образом, получим, что данное неравенство равносильно системе

$$x^2 - 1 > x + 5$$
$$x + 5 \geq 0$$

Сильному учащемуся предлагается провести рассуждение в общем виде, то получится вот, что:

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

$g(x) \geq 0.$

- Подумайте, что изменится, если вместо > в исходном неравенстве будет стоять знак ≥, ≤ или <.

*На доске вывешиваются 3 схемы решения иррациональных неравенства, ещё раз обсуждается принцип их построения.*

**4 этап - закрепление знаний (5мин.)**

Учащимся 2 группы предлагается указать, какой системе или их совокупности равносильно неравенство № 167 (Алгебра и начала анализа 10-11 кл. М, Просвещение, 2005, Ш.А.Алимов)

Двум наиболее подготовленным учащимся из этой группы предлагается решить на доске неравенства: № 1. $\sqrt{x^2 - 1} > 1$

№ 2. $\sqrt{25 - x^2} < 4$.

Учащиеся 1 группы получают аналогичное задание, но более высокого уровня сложности № 170 (Алгебра и начала анализа 10-11 кл. М, Просвещение, 2005, Ш.А.Алимов)

одному наиболее подготовленному учащемуся из этой группы предлагается решить на доске неравенство: $\sqrt{4x - x^2} < 5 - x$.

При этом всем учащимся разрешается пользоваться конспектом.

*В это время учитель работает с учащимися 3 группы: отвечает на их вопросы при необходимости помогает; и контролирует решение задач на доске.*

По истечению времени каждой группе выдаётся для проверки лист ответов (можно показать ответы на экране, используя мультимедийную систему).

**5 этап урока - обсуждение решений задач, представленных на доске (7мин.)**

*Учащиеся, выполнявшие задачи у доски, комментируют свои решения, а остальные вносят при необходимости коррективы и выполняют записи в тетрадях.*

**6 этап урока - подведение итогов урока, комментарии по домашнему заданию (2мин.)**

3 группа обмен карточками внутри группы.

2 группа № 168 (3, 4)

1 группа № 169 (5), № 170 (6)