Министерство образования, науки и молодежной политики
Краснодарского края
государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
Краснодарского края
«Курганинский аграрно-технологический техникум»

периодические функции

г. Курганинск, п. Красное Поле, 2023 г.

Рассмотрено и одобрено на заседании учебно-методического объединения «Общеобразовательных дисциплин по профильным, математическим и естественнонаучным дисциплинам»
Протокол № 3 от 25 октября 2023 г.
Председатель УМО Э.А. Приходько

Утверждены решением педагогического совета
Протокол № 4 от 15 ноября 2023 г.

Автор: Короткова А.Э., преподаватель математики, высшей квалификационной категории ГАПОУ КК «Курганинский аграрно - технологический техникум»

Рецензенты:
Проскурякова С.В., заместитель директора по УМР ГБПОУ «Лабинский социально - технический техникум», г. Лабинск

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Введение …………………………………………………… 2-3

Периодические функции и их свойства ……………. 4-6

Задачи ……………………………………………………… 7-14

Введение

Отметим, что у задач на периодичность в учебно-методической литературе нелёгкая судьба. Объясняется это странной традицией-допускать те или иные небрежности в определении периодических функций, которые приводят к к спорным решениям и провоцируют инциденты на экзаменах.

Например, в книге «Толковый словарь математических терминов» - М, 1965г., даётся следующее определение: «периодическая функция – функция
$y = f(x)$, для которой существует число $t > 0$, что для всех x и $x+t$ из области определения $f(x + t) = f(x)$.

Приведём контр-пример, показывающий некорректность этого определения. По этому определению периодической с периодом $t = 2\pi$ будет функция
$c(x) = \text{Cos}(\sqrt{x})^2 - \text{Cos}(\sqrt{4\pi - x})^2$ с ограниченной областью определения $[0; 4\pi]$, что противоречит общепринятой точке зрения о периодических функциях.

Аналогичные проблемы возникают и во многих новейших альтернативных учебниках для школы.

В учебнике А.Н.Колмогорова приводится следующее определение: «Говоря о периодичности функции f, полагают, что имеется такое число $T \neq 0$, что область определения Д (f) вместе с каждой точкой x содержит и точки, получающиеся из x параллельным переносом вдоль оси Ox (вправо и влево) на расстояние T. Функцию f называют <u>периодической</u> с периодом $T \neq 0$, если для любого из области определения значения этой функции в точках x, $x - T$, $x + T$ равны, т.е. $f(x + T) = f(x) = f(x - T)$». Далее в учебнике написано: «Поскольку синус и косинус определена на всей числовой прямой и $\text{Sin}(x + 2\pi) = \text{Sin}\, x$,
$\text{Cos}(x + 2\pi) = \text{Cos}\, x$ для любого x, синус и косинус – период функции с периодом 2π».
В этом примере почему-то не проверяется требуемое в определении условия что
$\text{Sin}(x - 2\pi) = \text{Sin}\, x$. В чём дело? Дело в том, что это условие в определении лишнее. Действительно, ведь если $T > 0$ – период функции $f(x)$, то T тоже будет являться периодом этой функции.

Хочу привести ещё одно определение из учебника М.И.Башмакова «Алгебра и начала анализа 10-11 кл.» «Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что равенство
$f(x + T) = f(x)$ выполняется тождественно при всех значениях x».

В приведённом определении ничего не говорится об области определения функции, хотя имеется в виду x из области определения, не любые действительные x. По такому определению периодической может быть функция $y = \text{Sin}(\sqrt{x})^2$, определенная только при $x \geq 0$, что неверно.

В едином государственном экзамене имеются задачи на периодичность. В одном научно- периодическом журнале в качестве тренинга по разделу С ЕГЭ было приведено решение задачи: « является ли функция $y(x) = \text{Sin}^2(2+x) - 2\,\text{Sin}\,2\,\text{Sin}\,x\,\text{Cos}(2+x)$ периодической?»

В решении проявляется, что $y(x - \pi) = y(x)$ в ответе – лишняя запись
«$T = \pi$» (ведь вопрос о нахождении наименьшего положительного периода не ставиться). Так ли необходимо для решения этой задачи проводить непростое тригонометрическое образование. Ведь здесь можно ориентироваться на понятие периодичности, как на ключевое в условии задачи.
Решение.
$f_1(x) = \text{Sin}\, x$ – периодическая функция с периодом $T = 2\pi$
$f_2(x) = \text{Cos}\, x$ – периодическая функция с периодом $T = 2\pi$, тогда 2π – период и для функций $f_3(x) = \text{Sin}(2 + x)$ и $f_4(x) = \text{Cos}(2 + x)$, (это следует из определения периодичности)
$f_5(x) = -2\,\text{Sin}\,2 = \text{Const}$, её периодом является любое число, в том числе и 2π.

Т.к. сумма и произведение периодических функций с общим периодом Т, также является Т-периодичной, то данная функция периодичная.

Надеюсь, что приведённый в этой работе материал, поможет при подготовке к единому государственному экзамену в решении задач на периодичность.

Периодические функции и их свойства

О п р е д е л е н и е: функция f(t) называется периодической, если для любого t из области определения этой функции D_f существует число $\omega \neq 0$, такое, что:

1) числа $(t \pm \omega) \in D_f$;

2) $f(t + \omega) = f(t)$.

1. Если число ω = период функции f (t), то число kω, где k = ±1, ±2, ±3, … тоже являются периодами функции f(t).

П р и м е р. f (t) = Sin t. Число T = 2π – наименьший положительный период данной функции. Пусть $T_1 = 4\pi$. Покажем, что T_1 тоже является периодом данной функции.

$F(t + 4\pi) = f(t + 2\pi + 2\pi) = \mathrm{Sin}\,(t + 2\pi) = \mathrm{Sin}\, t$.

Значит, T_1 – период функции f (t) = Sin t.

2. Если функция f(t) – ω – периодическая функция, то функции f (at), где a є R, и f (t + c), где c – произвольная константа, тоже являются периодическими.

Найдём период функции f (at).

$f(at) = f(at + \omega) = f(a(t + \omega/a))$, т.е. $f(at) = f(a(t + \omega/a)$.

Следовательно, период функции f(at) – $\omega_1 = \omega/a$.

П р и м е р 1. Найти период функции y = Sin t/2.

П р и м е р 2. Найти период функции y = Sin (t + π/3).

Пусть f(t) = Sin t; $y_0 = \mathrm{Sin}\,(t_0 + \pi/3)$.

Тогда функция f(t) = Sin t примет тоже значение y_0 при $t = t_0 + \pi/3$.

Т.е. все значения, которые принимает функция y принимает и функция f(t). Если t толковать как время, то каждое значение y_0 функцией y = Sin (t + π/3) принимается на π/3 единиц времени раньше, чем функцией f(t) «сдвигом» влево на π/3. Очевидно, период функции от этого не изменится т.е. $T_y = T_1$.

3. Если F(x) – некоторая функция, а f(t) – периодическая функция, причём такая, что f(t) принадлежит области определения функции F(x) – D_F, тогда функция F(f (t)) – периодическая функция.

Пусть F(f (t)) = φ.

$\Phi(t + \omega) = F(f(t + \omega)) = F(f(t)) = \varphi(t)$ для любого $t \in D_f$.

П р и м е р. Исследовать на периодичность функцию: $F(x) = \ell^{\sin x}$.

Область определения данной функции D_f совпадает с множеством действительных чисел R. f (x) = Sin x.

Множество значений этой функции – [-1; 1]. Т.к. отрезок [-1; 1] принадлежит D_f, то функция F(x) периодическая.

$F(x+2\pi) = \ell^{\sin(x + 2\pi)} = \ell^{\sin x} = F(x)$.

2 π – период данной функции.

4. Если функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ периодические соответственно с периодами ω_1 и ω_2 и $\omega_1/\omega_2 = r$, где r – рациональное число, то функции

$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$ и $f_1(t) \cdot f_2(t)$ являются периодическими (C_1 и C_2 – константы).

Замечание: 1) Если $r = \omega_1/\omega_2 = p/q$, т.к. r – рациональное число, тогда

$\omega_1 q = \omega_2 p = \omega$, где ω – наименьшее общие кратное чисел ω_1 и ω_2 (НОК).

Рассмотрим функцию $C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$.

Действительно, ω = НОК (ω_1 , ω_2) - период данной функции

$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) = C_1 f_1(t+ \omega_1 q) + C_2 f_2(t+ \omega_2 p) + C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$.

2) ω – период функции $f_1(t) \cdot f_2(t)$, т.к.

$f_1(t + \omega) \cdot f_2(t + \omega = f_1(t + \omega_1 q) \cdot f_2(t = \omega_2 p) = f_1(t) \cdot f_2(t)$.

О п р е д е л е н и е: Пусть $f_1(t)$ и f (t) – периодические функции с периодами соответственно ω_1 и ω_2, тогда два периода называются соизмеримыми, если $\omega_1/\omega_2 = r$ – рациональное число.

3) Если периоды ω_1 и ω_2 не соизмеримы, то функции $f_1(t) + f_2(t)$ и $f_1(t) \cdot f_2(t)$ не являются периодическими. Т.е., если $f_1(t)$ и $f_2(t)$отличны от константы, периодичны, непрерывны, их периоды не соизмеримы, то $f_1(t) + f_2(t)$, $f_1(t) \cdot f_2(t)$ не являются периодическими.

4) Пусть f(t) = C, где C – произвольная константа. Данная функция периодичная. Её периодом является любое рациональное число, значит, наименьшего положительного периода она не имеет.

5) Утверждение верно и для большего числа функций.

П р и м е р 1. Исследовать на периодичность функцию

$$f(x) = \text{Sin } x + \text{Cos } x.$$

Решение. Пусть $f_1(x) = \text{Sin } x$, тогда $\omega_1 = 2\pi k$, где $k \in Z$.

$T_1 = 2\pi$ – наименьший положительный период.

$f_2(x) = \text{Cos } x$, $T_2 = 2\pi$.

Отношение $T_1/T_2 = 2\pi/2\pi = 1$ – рациональное число, т.е. периоды функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соизмеримы. Значит, данная функция периодична. Найдём её период. По определению периодической функции имеем

$\text{Sin } (x + T) + \text{Cos } (x + T) = \text{Sin } x + \text{Cos } x$,

$\text{Sin } (x + T) - \text{Sin } x = \text{Cos } x - \text{Cos } (x + T)$,

$2 \text{ Cos } 2x+ \pi/2 \cdot \text{Sin } T/2 = 2 \text{ Sin } 2x+T/2 \cdot \text{Sin } T/2$,

$\text{Sin } T/2 (\text{Cos } T+2x/2 - \text{Sin } T+2x/2) =0$,

$\sqrt{2} \text{ Sin } T/2 \text{ Sin } (\pi/4 – T+2x/2) = 0$, следовательно,

$\text{Sin } T/2 = 0$, тогда $T = 2\pi k$.

Т.к. $(x \pm 2\pi k) \in D_f$, где $f(x) = \text{Sin } x + \text{Cos } x$,

$f(x + t) = f(x)$, то функция f(x) – периодическая с наименьшим положительным периодом 2π.

П р и м е р 2. Является ли периодическая функция $f(x) = \text{Cos } 2x \cdot \text{Sin } x$, каков её период?

Решение. Пусть $f_1(x) = \text{Cos } 2x$, тогда $T_1 = 2\pi : 2 = \pi$ (см. 2)

Пусть $f_2(x) = \text{Sin } x$, тогда $T_2 = 2\pi$. Т.к. $\pi/2\pi = ½$ - рациональное число, то данная функция является периодической. Её период T = НОК $(\pi, 2\pi) = 2\pi$.

Итак, данная функция периодическая с периодом 2π.

5. Пусть функция f(t), тождественно не равная константе, непрерывна и периодична, тогда она имеет наименьший положительный период ω_0, всякий другой период её ω имеет вид: $\omega = k\omega_0$, гдк $k \in Z$.

Замечание: 1) В этом свойстве очень важны два условия:

f(t) непрерывна, $f(t) \neq C$, где C – константа.

2) Обратное утверждение не верно. Т.е., если все периоды соизмеримы, то отсюда не следует, что существует наименьший положительный период. Т.е. у периодической функции наименьшего положительного периода может и не быть.

П р и м е р 1. f(t) = C, периодическая. Её период – любое действительное число, наименьшего периода нет.

П р и м е р 2. Функция Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ – рациональное число;} \\ 1, & \text{если } x \text{ – иррациональное число.} \end{cases}$$

Любое рациональное число является её периодом, наименьшего положительного периода нет.

6. Если f(t) – непрерывная периодическая функция и ω_0 – её наименьший положительный период, то функция $f(\alpha t + \beta)$ имеет наименьший положительный период $\omega_0/|\alpha|$. Это утверждение следует из п. 2.

П р и м е р 1. Найти период функции y = Sin (2x – 5).

Решение. y = Sin (2x – 5) = Sin (2(x – 5/2)).

График функции y получается из графика функции Sin x сначала «сжатием» в два раза, затем «сдвигом» вправо на 2,5. «Сдвиг на периодичность не влияет, T = π – период данной функции.

Легко получить период данной функции, используя свойство п. 6:

$$T = 2\pi/2 = \pi.$$

7. Если f(t) – ω – периодическая функция, и она имеет непрерывную производную f'(t), то f'(t) тоже периодическая функция, T = ω

П р и м е р 1. f(t) = Sin t, T = 2πk. Её производная f'(t) = Cos t

f'(t) = Cos t, T = 2πk, k є Z.

П р и м е р 2. f(t) = Cos t, T = 2πk. Её производная

f'(t) = - Sin t, T = 2πk, k є Z.

П р и м е р 3. f(t) =tg t, её период T = πk.

$f'(t) = 1/\,Cos^2 t$ – тоже периодическая по свойству п. 7 и имеет период T = πk.

Её наименьший положительный период T = π.

З А Д А Ч И.

№ 1

Является ли функция f(t) = Sin t + Sin πt периодической?

Решение. Для сравнения решим эту задачу двумя способами.

Во-первых, по определению периодической функции. Допустим, что f(t) – периодическая, тогда для любого t є D_f имеем:

$$Sin\,(t + T) + Sin\,\pi\,(t + T) = Sin\,t + Sin\,\pi t,$$
$$Sin\,(t + T) - Sin\,t = Sin\,\pi t - Sin\,\pi\,(t + T),$$
$$2\,Cos\,2t + T/2\,Sin\,T/2 = -2\,Cos\,2\,\pi t + \pi t/2\,Sin\,\pi t/2.$$

Т.к. это верно для любого t є D_f, то в частности и для t_0, при котором левая часть последнего равенства обращается в ноль.

Тогда имеем: 1) $Cos\,2t_0 + T/2\,Sin\,T/2 = 0$. Разрешим относительно T.

Sin T/2 = 0 при T = 2 πk, где k є Z.

2) $Cos\,2\pi t_0 + \pi t_0/2\,Sin\,\pi T/2 = 0$. Разрешим относительно T.

Sin πT/2 = 0, тогда T = 2πn/ π = 2n, n≠0, где n є Z.

Т.к. имеем тождество, то 2 πk = 2n, π = 2n/2 k = n/ k, чего быть не может, т.к. π – иррациональное число, а n/ k – рациональное. Т.е., наше предположение что функция f(t) – периодическая было не верным.

Во – вторых, решение гораздо упрощается, если воспользоваться приведёнными выше свойствами периодических функций:

Пусть $f_1(t)$ = Sin t, T_1 = 2 π; $f_2(t)$ = Sin πt, T_2 - 2π/π = 2. Тогда, T_1/T_2 = 2π/2 = π – иррациональное число, т.е. периоды T_1, T_2 не соизмеримы, значит, f(t) не является периодической.

Ответ: нет.

№ 2

Показать, что если α – иррациональное число, то функция

$$f(t) = \text{Cos } t + \text{Cos } \alpha t$$

не является периодической.

Решение. Пусть $f_1(t) = \text{Cos } t$, $f_2(t) = \text{Cos } \alpha t$.

Тогда их периоды соответственно $T_1 = 2\pi$, $T_2 = 2\pi/|\alpha|$ - наименьшие положительные периоды. Найдём, $T_1/T_2 = 2\pi|\alpha|/2\pi = |\alpha|$ - иррациональное число. Значит T_1 и T_2 несоизмеримы, а функция $f(t)$ не является периодической.

№ 3

Найти наименьший положительный период функции $f(t) = \text{Sin } 5t$.

Решение. По свойству п.2 имеем:

$f(t)$ – периодическая; $T = 2\pi/5$.

Ответ: $2\pi/5$.

№ 4

Является ли периодической функция $F(x) = \arccos x + \arcsin x$?

Решение. Рассмотрим данную функцию

$F(x) = \arccos x + \arcsin x = \pi - \arcsin x + \arcsin x = \pi$,

т.е. $F(x)$ – периодическая функция (см. свойство п. 5, пример 1.).

Ответ: да.

№ 5

Является ли периодической функция

$$f(x) = \text{Sin } 2x + \text{Cos } 4x + 5 \text{ ?}$$

решение. Пусть $f_1(x) = \text{Sin } 2x$, тогда $T_1 = \pi$;

$f_2(x) = \text{Cos } 4x$, тогда $T_2 = 2\pi/4 = \pi/2$;

$f_3(x) = 5$, T_3 – любое действительное число, в частности T_3 можем предположить равным T_1 или T_2. Тогда период данной функции $T =$ НОК $(\pi, \pi/2) = \pi$. Т.е., $f(x)$ – периодическая с периодом $T = \pi$.

Ответ: да.

№ 6

Является ли периодической функция $f(x) = x – E(x)$, где $E(x)$ – функция, ставящая аргументу x в соответствие наименьшее целое число, не превосходящее данное.

Решение. Часто функцию $f(x)$ обозначают $\{x\}$ – дробная часть числа x, т.е.

$f(x) = \{x\} = x – E(x)$.

Пусть $f(x)$ – периодическая функция, т.е. существует такое число $T > 0$, что $x – E(x) = x + T – E(x + T)$. Распишем это равенство

$\{x\} + E(x) – E(x) = \{x + T\} + E(x + T) – E(x + T)$,

$\{x\} + \{x + T\}$ – верно для любого x из области определения D_f, при условии, что $T \neq 0$ и $T \in Z$. Наименьшее положительное из них $T = 1$, т.е. $T = 1$ такое, что

$$x + T – E(x + T) = x – E(x),$$

причём, $(x \pm Tk) \in D_f$, где $k \in Z$.

Ответ: данная функция периодична.

№ 7

Является ли периодичной функция $f(x) = \text{Sin } x^2$.

Решение. Допустим, что $f(x) = \text{Sin } x^2$ периодическая функция. Тогда по определению периодической функции существует число $T \neq 0$ такое, что: $\text{Sin } x^2 = \text{Sin } (x + T)^2$ для любого $x \in D_f$.

$$\text{Sin } x^2 = \text{Sin } (x + T)^2 = 0,$$

$2\ \mathrm{Cos}\ x^2 + (x+T)^2/2\ \mathrm{Sin}\ x^2-(x+T)^2/2 = 0$, тогда

$\mathrm{Cos}\ x^2 + (x+T)^2/2 = 0$ или $\mathrm{Sin}\ x^2-(x+T)^2/2 = 0$.

Рассмотрим первое уравнение:

$\mathrm{Cos}\ x^2 + (x+T)^2/2 = 0,$

$x^2 + (x+T)^2/2 = \pi(1+2\ k)/2 \quad (k \in Z),$

$T = \sqrt{}\ \pi(1+2\ k) - x^2 - x. \qquad (1)$

Рассмотрим второе уравнение:

$\mathrm{Sin}\ x^2-(x+T)^2/2 = 0,$

$x + T = \sqrt{}\text{-}\ 2\pi k + x^2,$

$T = \sqrt{}x^2 - 2\pi k - x. \qquad (2)$

Из выражений (1) и (2) видно, что найденные значения T зависит от x, т.е. не существует такого T>0, что

$\mathrm{Sin}\ x^2 = \mathrm{Sin}\ (x+T)^2$

для любого x из области определения этой функции. f(x) – не периодична.

Ответ: нет

№ 8

Исследовать на периодичность функцию $f(x) = \mathrm{Cos}^2\ x$.

Решение. Представим f(x) по формуле косинуса двойного угла

$f(x) = 1/2 + 1/2\ \mathrm{Cos}\ 2x.$

Пусть $f_1(x) = ½$, тогда T_1 – это может быть любое действительное число; $f_2(x) = ½\ \mathrm{Cos}\ 2x$ – периодическая функция, т.к. произведение двух периодических функций, имеющих общий период $T_2 = \pi$. Тогда наименьший положительный период данной функции

$T = \text{НОК}\ (T_1, T_2) =\pi.$

Итак, функция $f(x) = \mathrm{Cos}^2 x - \pi$ – периодична.

Ответ: π – периодична.

№ 9

Может ли областью определения периодической функции быть:

а) полупрямая $[a, \infty)$,

б) отрезок [0, 1] ?

Решение. Нет, т.к.

а) по определению периодической функции, если $x \in D_f$, то $x \pm \omega$ тоже должны принадлежать области определения функции. Пусть x = a, то

$x_1 = (a - \omega) \in \cancel{[a, \infty)}$;

б) пусть x = 1, то $x_1 = (1 + T) \in \cancel{[0, 1]}$.

№ 10

Может ли периодическая функция быть:

а) строго монотонной;

б) чётной;

в) не чётной?

Решение. а) Пусть f(x) – периодическая функция, т.е. существует $T\neq 0$ такое, что для любого x из области определения функций D_f чтсла

$(x \pm T) \in D_f$ и $f\ (x\pm T) = f(x)$.

Зафиксируем любое $x_0 \in D_f$, т.к. f(x) – периодическая, то $(x_0+T) \in D_f$ и $f(x_0) = f(x_0+T)$.

Допустим, что f(x) строго монотонна и на всей области определения D_f, например, возрастает. Тогда по определению возрастающей функции для любых x_1 и x_2 из области определения D_f из неравенства $x_1< x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$. Вчастности, из условия $x_0<x_0 + T$, следует, что

$f(x_0) < f(x_0 + T)$, что противоречит условию.

Значит, периодическая функция не может быть строго монотонной.

б) Да, периодическая функция может быть чётной. Приведём несколько примеров.

$f(x) = \text{Cos } x$, $\text{Cos } x = \text{Cos } (-x)$, $T = 2\pi$, $f(x)$ – чётная периодическая функция.

$$D(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ – рациональное число;} \\ 1, \text{ если } x \text{ – иррациональное число.} \end{cases}$$

$D(x) = D(-x)$, область определения функции $D(x)$ симметрична.

Функция Дирехле $D(x)$ является чётной периодической функцией.

$f(x) = \{x\}$,

$f(-x) = -x - E(-x) = \{-x\} \neq \{x\}$.

Данная функция не является чётной.

в) Периодическая функция может быть нечётной.

$f(x) = \text{Sin } x$, $f(-x) = \text{Sin } (-x) = - \text{Sin} = - f(x)$

$f(x)$ – нечетная периодическая функция.

$f(x) - \text{Sin } x \cdot \text{Cos } x$, $f(-x) = \text{Sin } (-x) \text{ Cos } (-x) = - \text{Sin } x \text{ Cos } x = - f(x)$,

$f(x)$ – нечётная и периодическая.

$f(x) = \ell^{\text{Sin } x}$, $f(-x) = \ell^{\text{Sin}(-x)} = \ell^{-\text{Sin } x} \neq - f(x)$,

$f(x)$ не является нечётной.

$f(x) = \text{tg } x$ – нечётная периодическая функция.

Ответ: нет; да; да.

№ 11

Сколько нулей может иметь периодическая функция на:
1) [а, б]; 2) на всей числовой оси, если период функции равен Т?

Решение: 1. а) На отрезке [а, б] периодическая функция может не иметь нулей, например, $f(x) = C$, $C \neq 0$; $f(x) = \text{Cos } x + 2$.

б) На отрезке [а, б] периодическая функция может иметь бесконечное множество нулей, например, функция Дирехле

$$D(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ – рациональное число,} \\ 1, \text{ если } x \text{ – иррациональное число.} \end{cases}$$

в) На отрезке [а, б] периодическая функция может иметь конечное число нулей. Найдём это число.

Пусть Т – период функции. Обозначим

$X_0 = \{\min x \in \{а,б\}$, таких что $f(x) = 0\}$.

Тогда число нулей на отрезке [а, б]: $N = 1 + E\ (в\text{-}x_0/T)$.

Пример 1. $x \in [-2, 7\pi/2]$, $f(x) = \text{Cos}^2 x$ – периодическая функция с периодом $T = \pi$; $x_0 = -\pi/2$; тогда число нулей функции $f(x)$ на данном отрезке

$N = 1 + E\ (7\pi/2 - (-\pi/2)/2) = 1 + E\ (8\pi/2\pi) = 5$.

Пример 2. $f(x) = x - E(x)$, $x \in [-2; 8{,}5]$. $f(x)$ – периодическая функция, $T + 1$,

$x_0 = -2$. Тогда число нулей функции $f(x)$ на данном отрезке

$N = 1 + E\ (8{,}5 - (-2)/1) = 1 + E\ (10{,}5/1) = 1 + 10 = 11$.

Пример 3. $f(x) = \text{Cos } x$, $x \in [-3\pi; \pi]$, $T_0 = 2\pi$, $x_0 = - 5\pi/2$.

Тогда число нулей данной функции на заданном отрезке

$N = 1 + E\ (\pi - (-5\pi/2)/2\pi) = 1 + E\ (7\pi/2\pi) = 1 + 3 = 4$.

2. а) Бесконечное число нулей, т.к. $x_0 \in D_f$ и $f(x_0) = 0$, то для всех чисел $X_0 + Tk$, где $k \in Z$, $f(x_0 \pm Tk) = f(x_0) = 0$, а точек вида $x_0 \pm Tk$ бесконечное множество;

б) не иметь нулей; если $f(x)$ – периодическая и для любых

$x \in D_f$ функция $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$. Например:

$f(x) = \text{Sin } x + 3{,}6$; $f(x) = C$, $C \neq 0$;

$f(x) = \text{Sin } x - 8 + \text{Cos } x$;

$f(x) = \text{Sin } x \text{ Cos } x + 5$.

№ 12

Может ли сумма не периодических функций быть периодической?

Решение. Да, может. Например:

1. $f_1(x) = x$ – непериодическая, $f_2(x) = E(x)$ – непериодическая
   $f(x) = f_1(x) - f_2(x) = x - E(x)$ – периодическая.
2. $f_1(x) = x$ – непериодическая, $f(x) = \text{Sin } x + x$ – непериодическая
   $f(x) = f_2(x) - f_1(x) = \text{Sin } x$ – периодическая.

Ответ: да.

№ 13

Функция $f(x)$ и $\varphi(x)$ периодические с периодами T_1 и T_2 соответственно. Всегда ли их произведение есть периодическая функция?

Решение. Нет, только в случае, когда T_1 и T_2 – соизмеримы. Например,

$f(x) = \text{Sin } x \cdot \text{Sin } \pi x$, $T_1 = 2\pi$, $T_2 = 2$; тогда $T_1/T_2 = 2\pi/2 = \pi$ – иррациональное число, значит, $f(x)$ не является периодической.

$f(x) = \{x\} \text{ Cos } x = (x - E(x)) \text{ Cos } x$. Пусть $f_1(x) = x - E(x)$, $T_1 = 1$; $f_2(x) = \text{Cos } (x)$, $T_2 = 2\pi$. $T_2/T_1 = 2\pi/1 = 2\pi$, значит $f(x)$ не является периодической.

Ответ: Нет.

Задачи для самостоятельного решения

Какие из функций являются периодическими, найти период?

1. $f(x) = \text{Sin } 2x$,
2. $f(x) = \text{Cos } x/2$,
3. $f(x) = \text{tg } 3x$,
4. $f(x) = \text{Cos } (1 - 2x)$,
5. $f(x) = \text{Sin } x \text{ Cos } x$,
6. $f(x) = \text{ctg } x/3$,
7. $f(x) = \text{Sin } (3x - \pi/4)$,
8. $f(x) = \text{Sin}^4 x + \text{Cos}^4 x$,
9. $f(x) = \text{Sin}^2 x$,
10. $f(x) = \text{Sin } x/2 + \text{tg } x$,
11. $f(x) = \text{Sin } 3x + \text{Cos } 4x$,
12. $f(x) = \text{Sin}^2 x + 1$,
13. $f(x) = \text{tg } x + \text{ctg}\sqrt{2}x$,
14. $f(x) = \text{Sin } \pi x + \text{Cos } x$,
15. $f(x) = x^2 - E(x^2)$,
16. $f(x) = (x - E(x))^2$,
17. $f(x) = 2^{x - E(x)}$,
18. $f(x) = x - n + 1$, если $n \le x \le n + 1$, $n = 0, 1, 2\ldots$

№ 14

Пусть $f(x) - T$ – периодическая функция. Какие из функций периодические (найти T)?

1. $\varphi(x) = f(x + \lambda)$ – периодическая, т.к. «сдвиг» вдоль оси Ox на ω не влияет; её период $\omega = T$.
2. $\varphi(x) = a\, f(x + \lambda) + в$ – периодическая функция с периодом $\omega = T$.
3. $\varphi(x) = f(kx)$ – периодическая функция с периодом $\omega = T/k$.
4. $\varphi(x) = f(ax + в)$ - периодическая функция с периодом $\omega = T/a$.
5. $\varphi(x) = f(\sqrt{x})$ не является периодической, т.к. её область определения $D_\varphi = \{x/x \ge 0\}$, а у периодической функции область определения полуосью быть не может.
6. $\varphi(x) = (f(x) + 1/(f(x) - 1)$ – периодическая функция, т.к.
   $\varphi(x + T) = f(x+T) + 1/f(x + T) - 1 = \varphi(x)$, $\omega = T$.

7. $\varphi(x) = a\, f^2(x) + в\, f(x) + c$.

Пусть $\varphi_1(x) = a\, f^2(x)$ – периодическая, $\omega_1 = т/2$;

$\varphi_2(x) = в\, f(x)$ – периодическая, $\omega_2 = T/T = T$;

$\varphi_3(x) = c$ – периодическая, ω_3 – любое число;

тогда ω = НОК(T/2; T) = T, $\varphi(x)$ – периодическая.

Иначе, т.к. областью определения данной функции является вся числовая прямая, то множество значений функции f – $E_f \in D_\varphi$, значит, функция $\varphi(x)$ – периодическая и $\omega = T$.

8. $\varphi(x) = \sqrt{\varphi(x)}$, $f(x) \geq 0$.

$\varphi(x)$ – периодическая с периодом $\omega = T$, т.к. для любого x функция f(x) принимает значения $f(x) \geq 0$, т.е. её множество значений $E_f \in D_\varphi$, где D_φ – область определения функции $\varphi(z) = \sqrt{z}$.

№ 15

Является ли функция $f(x) = x^2$ периодической?

Решение. Рассмотрим $x \geq 0$, тогда для f(x) существует обратная функция $\sqrt{x}$, значит, на этом интервале f(x) – монотонная функция, тогда она не может быть периодической (см. № 10).

№ 16

Дан многочлен $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x + \ldots a_nx$.

Является ли P(x) периодической функцией?

Решение. 1. Если тождество равно константе, то P(x) – периодическая функция, т.е. если $a_i = 0$, где $i \geq 1$.

2.Пусть $P(x) \neq c$, где c – некоторая константа. Допустим P(x) – периодическая функция, и пусть P(x) имеет вещественные корни, тогда т.к. P(x) - периодическая функция, то их должно быть бесконечное множество. А по основной теореме алгебры их число k таково, что $k \leq n$. Значит, P(x) не является периодической функцией.

3. Пусть P(x) тождественно неравный нулю многочлен, и он не имеет вещественных корней. Допустим, P(x) – периодическая функция. Введём многочлен $q(x) = a_0$, q(x) – периодическая функция. Рассмотрим разность $P(x) - q(x) = a_1x^2 + \ldots + a_nx^n$.

Т.к. в левой части равенства стоит периодическая функция, то функция, стоящая в правой части, тоже периодична, причём, она имеет хотя бы один вещественный корень, $x = 0$. Т.к. функция периодична, то нулей должно быть бесконечное множество. Получили противоречие.

P(x) не является периодической функцией.

№ 17

Дана функция f(t) – T – периодическая. Является ли функция $f^к(t)$, где $k \in Z$, периодической функцией, как связаны их периоды?

Решение. Доказательство проведём методом математической функции. Пусть

$f^1 = f(t)$, тогда $f^2 = f^2(t) = f(t) \cdot f(t)$,

f_2 – периодическая функция по свойству п. 4.

$F_3 = f^3(t) = f(t) \cdot f_2$ – периодическая функция по свойству п. 4.

…………………………………………………………………………

Пусть $f_{к-1} = f^{к-1}(t)$ – периодическая функция и её период $T_{к-1}$ соизмерим с периодом T. Умножим обе части последнего равенства на f(t), получим $f_{к-1} \cdot f(t) = f(t) \cdot f^{к-1}(t)$,

$f_к = f^к(t)$ – периодическая функция по свойству п.4. $\omega \leq T$.

№ 18

Пусть f(x – произвольная функция, определённая на [0; 1]. Является ли функция f({x}) периодической?

О т в е т: да, т.к. множество значений функции {x} принадлежит области определения функции f(x), то по свойству п.3 f({x}) – периодическая функция, её период ω = T = 1.

№ 19

f(x) – произвольная функция, определённая на [-1; 1], является ли функция f(sinx) периодической?

О т в е т: да, её период ω = T = 2π (доказательство аналогично № 18).